MMIM Méthodes mathématiques pour l'informatique musicale

Marc Chemillier

Master Atiam (Ircam), 13 février 2008

Notions théoriques en combinatoire des mots

- Définitions générales
  - Mots, langages
  - Monoïdes
  - Mots infinis
- Conjugaison, mots de Lyndon

1. Définitions générales

1.1 Mots

Un *mot* fini u est une suite de symboles. La longueur de u notée $|u|$ est le nombre de symboles du mot. Le *mot vide* noté ε est le seul mot de longueur nulle. L'ensemble des symboles noté Σ est appelé *alphabet*, et l'ensemble des mots sur l'alphabet Σ est noté Σ^*.

Pour deux mots $u = u_1 \ldots u_n$ et $v = v_1 \ldots v_m$, on définit la *concaténation* uv comme le mot obtenu en mettant les lettres de v à la suite de celles de u :

$uv = u_1 \ldots u_n v_1 \ldots v_m$.

Un mot $u \in \Sigma^*$ est *facteur* du mot $w \in \Sigma^*$ s'il existe $v, v' \in \Sigma^*$ tels que $w = vuv'$. Si $v = \varepsilon$, on dit que u est *préfixe*. Si $v' = \varepsilon$, on dit que u est *suffixe*.

Exemple : *abb* est facteur de *babba*, et *ba* est à la fois préfixe et suffixe, mais *aa* n'est pas facteur.

Un mot fini u est *périodique* si $u = x^n$ pour $n \geq 2$. Tout mot non périodique est dit *primitif*.

L'idée fondamentale de ce cours est que la notion de mot permet de représenter le principe de succession d'événements dans une séquence musicale, d'où son intérêt pour la modélisation en informatique musicale.

1.2 Langages

Les sous-ensembles de Σ^* sont appelés des *langages* (c'est-à-dire des ensembles de mots, ou de séquences musicales dans le contexte de l'informatique musicale).

Opérations sur les langages :

• opérations classiques sur les ensembles :
union $\cup$, intersection $\cap$, différence \, complémentaire,

• opérations héritées de la concaténation :
La concaténation de deux langages est définie par :
$L_1L_2 = \{uv,\ u \in L_1 \text{ et } v \in L_2\}$.
Exemple : $L_1 = \{a, ab\}$, $L_2 = \{c, bc\}$, $L_1L_2 = \{ac, abc, abbc\}$.

La *puissance* d'un langage L est définie inductivement :
$L^0 = \{\varepsilon\}$, $L^{n+1} = L^nL$.
L'*étoile* d'un langage L, notée L^*, est :
$L^* = \{\varepsilon\} \cup L \cup L^2 \ldots \cup L^n \cup \ldots$
Ce langage contient un nombre infini de mots, qui sont les répétitions indéfinies de mots de L.
Exemple : $L = \{ab, b\}$, L^* est l'ensemble de tous les mots tels que aa n'est pas facteur, et a n'est pas suffixe.
On note également L^+ le langage :
$L^+ = L \cup L^2 \ldots \cup L^n \cup \ldots$

1.3 Monoïdes

Un *monoïde* est un ensemble muni d'une opération
• associative,
• possédant un élément neutre 1.
Un *sous-monoïde* est un sous-ensemble fermé pour l'opération et contenant l'élément neutre. L'ensemble Σ^* des mots sur l'alphabet Σ est un monoïde pour la concaténation, dont l'élément neutre est le mot vide ε. C'est le *monoïde libre* sur Σ.

Un *morphisme* de monoïde est une application φ telle que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ et $\varphi(1) = 1$. Toute application d'un alphabet Σ dans un monoïde quelconque se prolonge dans le monoïde libre Σ^* en un unique morphisme de monoïdes.

Un *code* est une partie X de Σ^* telle que si $a_1, \ldots a_p$ et $b_1, \ldots b_q$ sont des éléments de X vérifiant :
$a_1 \ldots a_p = b_1 \ldots b_q$

alors $p = q$ et $a_i = b_i$ pour tout $i \leq p$.

Exemples :

• L'ensemble $\{a, ab, c, bc\}$ n'est pas un code car

$(a)(bc) = (ab)(c)$

• L'ensemble Σ^n des mots de longueur n est un code, en particulier l'alphabet Σ est un code.

• Attention : Le code morse n'est pas un code dans le sens ci-dessus, car A = « .- », N = « -. », et P = « .--. », donc on a AN = P. Le décodage en morse se fait grâce à la présence de séparateurs entre les lettres

Tout sous-monoïde M de Σ^* est engendré par un unique ensemble B appelé *base* de M tel que $M = B^*$. La base B est l'ensemble des éléments de M qui ne sont pas le produit de deux éléments de M, soit :

$$B = (M\backslash\{\varepsilon\}) \setminus (M\backslash\{\varepsilon\})(M\backslash\{\varepsilon\})$$

La base de Σ^* est l'alphabet Σ. Un sous-monoïde de Σ^* est *libre* si sa base est un code.

1.4 Mots infinis

Un *mot infini* est une application de **N** dans un alphabet Σ. On définit la concaténation xu d'un mot fini $x \in \Sigma^*$ avec un mot infini u. Un mot $x \in \Sigma^*$ est *facteur* d'un mot infini u s'il existe $x' \in \Sigma^*$ et v mot infini tels que $u = x'xv$.

Un mot infini u est *m-périodique* si :

$u(i + m) = u(i)$ pour tout i $\in \mathbf{N}$.

Sa *période* est le plus petit entier m tel qu'il est m-périodique.

Un mot u est *ultimement périodique* s'il s'écrit $u = xv$ où v est périodique.

Pour un mot infini u, on note $P(u, n)$ le nombre de facteurs de u de longueur n.

• Que peut-on dire de $P(u, m)$ si u est un mot infini périodique de période m ?

$P(u, m) \leq m$

En effet, on passe en revue tous les facteurs de longueur m en se décalant à chaque fois d'un rang, et au bout de m décalages, on retombe sur le premier facteur.

En fait, il existe une discontinuité dans le comportement de $P(u, n)$ selon le type de mot infini : sa valeur est bornée par une constante pour les mots ultimement périodiques, alors qu'elle croît de façon plus que linéaire pour les autres.

Théorème. *Pour tout mot infini u, l'une des deux conditions suivantes est vraie :*

- *soit $P(u, n)$ est borné pour les mots ultimement périodiques,*
- *soit $P(u, n) \geq n + 1$ pour les autres.*

Un mot infini u est *sturmien* si $P(u, n) = n + 1$ pour tout n. Il s'agit des mots les plus « réguliers » après les mots périodiques.

- Que peut-on déduire du fait que pour $n = 1$, on a $P(u, 1) = 2$?

L'alphabet Σ ne peut avoir que deux lettres.

Voir la conférence de Thomas Noll sur l'utilisation des mots sturmiens dans l'étude des modes diatoniques :

http://www.entretemps.asso.fr/maths/Noll.htm

2. Conjugaison et mots de Lyndon

2.1 Conjugaison

On introduit une permutation δ de Σ^* en posant :

$\delta(au) = ua$ pour $u \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$,

$\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Cela revient à faire passer la première lettre d'un mot à la fin.

La *classe de conjugaison* de u est l'orbite de u sous l'action de δ. C'est l'ensemble des permutations circulaires de u.

Proposition. *Un mot primitif u de longueur n a exactement n permutations circulaires distinctes.*

Dem. Supposons que deux permutations circulaires soient égales, c'est-à-dire $\delta^i(u) = \delta^j(u)$ pour $0 \leq i < j < n$.

Alors pour $k = j - i < n$, on a $\delta^k(u) = u$.

Soit d le plus petit entier > 0 tel que

$$\delta^d(u) = u.$$

On a $u = \delta^d(u) = \delta^{2d}(u) \ldots \delta^{md}(u) = \ldots$

Soit md le plus petit multiple de d vérifiant l'égalité et tel que $md \geq n$.

Alors $md = n$, sinon $d' = md - n < d$ est plus petit que d et vérifie aussi l'égalité.

Donc d divise n. On peut factoriser u en mots de longueur d :

$u = x_1x_2\ldots x_q$

Alors $u = x_1x_2\ldots x_q = \delta^d(u) = x_2\ldots x_qx_1$, donc $x_1 = x_2\ldots = x_q$ que l'on note x, et $u = x^d$.

Corollaire fondamental ([Lothaire 1983, p. 7, proposition 1.3.2]). *Si deux mots u et v commutent uv = vu, alors ils sont puissances d'un même mot u, v* $\in x^*$.

Dem. Soit n la longueur de uv et $k < n$ la longueur de u, on a $\delta^k(uv) = vu = uv$.

D'après la proposition précédente, si le mot uv n'a pas n permutations circulaires distinctes, *a contrario*, alors uv est puissance d'un mot plus court x de longueur d.

Mais alors d divise n, k et $n - k$.

Donc $u = x^{k/d}$ et $v = x^{(n-k)/d}$.

2.2 Mots de Lyndon

Un *mot de Lyndon* est un mot

• primitif,

• minimal pour l'ordre alphabétique dans sa classe de conjugaison.

Pour étudier des structures musicales périodiques, les mots de Lyndon fournissent <u>un représentant unique pour chaque classe de conjugaison</u>.

Formule d'inversion de Möbius. *Soit la fonction de Möbius définie sur* $\mathbf{N}\backslash 0$

• $\mu(1) = 1$,

• $\mu(n) = (-1)^i$ *si n est le produit de i entiers premiers distincts,*

• $\mu(n) = 0$ *si n est divisible par un carré.*

Alors pour toutes fonctions φ *et* ψ *de* $\mathbf{N}\backslash 0$ *dans* $\mathbf{Z}$*, on a :*

$\varphi(n) = \Sigma_{d|n}\, \psi(d)$

si et seulement si :

$\psi(n) = \Sigma_{d|n}\, \mu(d)\varphi(n / d)$.

On pose $k = \mathrm{card}(\Sigma)$ le nombre de lettres.

Comment calculer $\psi_k(n)$ = le nombre de mots de Lyndon de longueur n ?

(c'est-à-dire le nombre de classes de conjugaison de mots primitifs de longueur n dans Σ^*).

Si d divise n avec $n = qd$, alors pour tout mot de longueur n de la forme $u = x^q$ où x est primitif, le nombre de conjugués de u est exactement d. Le nombre total k^n de mots de longueur n peut s'écrire :

$k^n = \Sigma_{d|n}\, d\psi_k(d)$.

On pose $\varphi_k(n) = k^n$. D'après la formule de Möbius, on en déduit :

$\psi_k(n) = (1/n)\, \Sigma_{d|n}\, \mu(d)k^{n\,/\,d}$.

Références

• <u>ouvrages fondamentaux</u>

Lothaire M., *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 17, Addison-Wesley, 1983 (réédité Cambridge University Press, 1997, chap. 1 disponible en ps).

Lothaire M., *Algebraic Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2002.

Lothaire M., *Applied Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2005.

• <u>modélisation de structures musicales périodiques</u>

Chemillier M., Periodic musical sequences and Lyndon words, *Soft Computing*, special issue on Formal Systems and Music, G. Assayag, V. Cafagna, M. Chemillier (eds.) **8** (9) (2004) 611-616.

Chemillier M., Truchet C., Computation of words satisfying the "rhythmic oddity property" (after Simha Arom's work), *Information Processing Letters* **86** (5) (2003) 255-261.

Chemillier M., Musique et rythme en Afrique centrale, *Pour la science*, dossier n° 47 « Mathématiques exotiques » (2005) 72-76.

Chemillier M., *Les Mathématiques naturelles*, Paris, Odile Jacob, 2007.

Hall Rachel W., Klingsberg Paul, Asymmetric rhythms, tiling canons, and Burnside's lemma, R. Sarhanghi, C. Sequin (eds.), *Mathematical Connections in Art, Music, and Science*, Winfield, Kansas, 2004, p. 189-194 (pdf).